

Comprendre la numération en CP

L'apprentissage du principe de numération décimale de position au Cours Préparatoire : analyse d'une ingénierie didactique.

RÉSUMÉ

Cet article porte sur l'analyse de la mise en œuvre d'une ingénierie didactique dans une classe de Cours Préparatoire. Il s'agit de déterminer les conditions qui permettent un apprentissage raisonné du principe de numération décimale de position en CP. L'analyse permet d'évaluer la pertinence des choix effectués pour construire la séquence, tant du point de vue de l'activité des élèves que du point de vue de l'activité de l'enseignant. Il ressort de ce travail que les conditions proposées ne permettent pas aux élèves de construire véritablement la convention d'écriture et que cet enseignement pose problème. Le niveau de connaissances des élèves, l'énumération, le changement de statut du nombre, l'utilisation du terme «compter» sont autant d'obstacles à l'apprentissage du principe de numération décimale de position. Ce travail pointe également les limites des ingénieries didactiques relevant de la théorie des situations didactiques.

Florence **LUCAS**

Master MEEF

Mention PIF

Parcours Enseignement

Expertise Apprentissage

ESPE Académie de Nantes

MOTS CLÉS :

apprentissage de la numération, convention d'écriture des nombres, procédure de groupement, statut du nombre

INTRODUCTION

Les résultats des dernières études sur les performances des élèves en mathématiques attestent d'une baisse de niveau. Les élèves maîtrisent moins bien le système de numération qu'autrefois et leurs habiletés de calcul, de manipulation du système métrique ou de résolution de problèmes s'en trouvent altérées (PISA, 2012). Cela signifie qu'ils ne maîtrisent pas suffisamment le concept de nombre. Or, les élèves l'utilisent depuis leur plus jeune âge et l'enseignement de la numération à l'école vise justement la maîtrise de ce concept. L'enjeu de l'enseignement de la numération à l'école est en effet d'amener les élèves à comprendre la signification de chacune des propriétés de notre système de numération pour les aider à mieux calculer et à mieux appréhender la résolution de problèmes. Comment se fait-il que cet enseignement ne fonctionne pas ? Qu'est-ce qui résiste à l'apprentissage du principe de numération décimale de position ? Ces interrogations nous ont amenés à nous intéresser à l'apprentissage de la numération au Cours Préparatoire (CP dans la suite du texte) pour comprendre comment est introduit notre système de numération auprès des jeunes élèves et déterminer ce qui peut faire obstacle à cet apprentissage. Nous avons pour cela cherché à identifier des conditions qui per-

mettent un apprentissage raisonné du principe de numération décimale de position au CP c'est-à-dire un apprentissage qui permette d'accéder au sens de la numération décimale de position et de comprendre ses implications sur la numération écrite. Nous avons élaboré une ingénierie didactique qui s'inscrit dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1988) et prend en compte des résultats de travaux de recherche sur l'apprentissage de la numération (Bednarz et Janvier, 1984), (Mounier, 2010). Nous avons ensuite proposé à un enseignant d'une classe ordinaire de CP de mettre en œuvre cette séquence d'apprentissage et nous l'avons analysée afin d'évaluer la pertinence des choix effectués pour constituer la séquence, tant du point de vue de l'activité de l'élève que du point de vue de l'activité de l'enseignant. Cet article rend compte de ce travail.

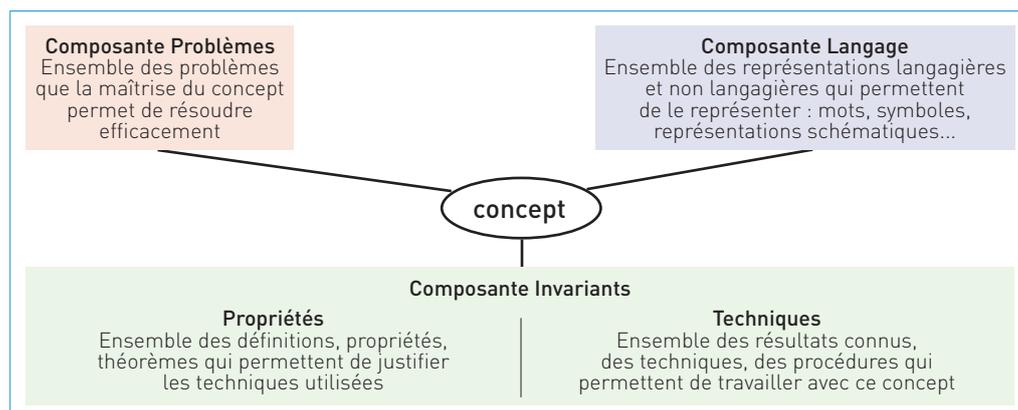
ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION

Le concept de nombre

S'appuyant sur la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (2011), Charnay (2013, p. 11) caractérise le concept de nombre selon trois « composantes » : Problèmes, Invariants et Langage, comme présentées dans le schéma ci-dessous :

FIGURE N°1

Le concept de nombre (d'après Charnay, 2013, p. 11)



Le concept de nombre se développe dès le plus jeune âge. Il se construit et s'étoffe dans les situations de la vie quotidienne et à l'école puis il continue d'évoluer à mesure que l'individu est confronté à différentes situations. Les composantes Problèmes, Invariants et Langage s'enrichissent ainsi progressivement et les notions de quantité et de position se construisent graduellement.

Les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage du nombre

L'apprentissage du nombre génère souvent des difficultés chez les élèves. A l'école maternelle, ce sont souvent les activités de comptage qui posent problème. Si cela peut être dû à une méconnaissance de la comptine numérique, ces difficultés s'expliquent également par une insuffisante maîtrise de l'énumération (Briand, 1999).

Ils utilisent la représentation symbolique du nombre sans en percevoir le sens.

L'énumération est, comme l'explique Briand (ib.), l'action « au cours de laquelle il s'agit de passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule » (p. 9). Les élèves qui ont des difficultés à énumérer peinent à organiser et à contrôler leur parcours d'une collection. Ils ont tendance à mélanger les objets qu'ils ont comptés (ou traités) avec ceux qui ne l'ont pas été. Cette difficulté est accentuée quand la collection n'est pas déplaçable. Si l'énumération met autant les élèves en difficulté, c'est que cette connaissance est souvent implicite. Considérée à tort comme allant de soi, elle ne fait pas l'objet d'un enseignement (ib.).

Ces difficultés se retrouvent à l'école élémentaire mais, à ce stade de la scolarité, d'autres obstacles apparaissent. Bednarz et Janvier (1984) ont montré que les élèves n'interprètent pas la désignation chiffrée des nombres en termes de groupements et qu'ils utilisent la représentation symbolique du nombre sans en percevoir le sens : par exemple, l'écriture

« 1984 » n'est appréhendée que comme un simple découpage unité/dizaine/centaine/millier ; les élèves ne perçoivent pas que 8 correspond à huit dizaines, 9 à neuf centaines... Ainsi les connaissances relatives à la numération décimale de position ne peuvent pas être mobilisées pour résoudre des problèmes. C'est donc le sens et le rôle de la numération qui ne sont pas perçus.

L'enseignement de la numération à l'école

En s'intéressant à l'enseignement de la numération à l'école élémentaire, Bednarz et Janvier (1984) avaient montré que, tel qu'il était conçu dans les années 80, il amenait les élèves à une compréhension de la numération basée uniquement sur son aspect positionnel. Plus récemment, Tempier (2010), qui a mené une étude sur l'enseignement de la numération décimale au cycle 3, est arrivé aux mêmes conclusions : la numération n'est presque pas envisagée sous son aspect décimal, d'où les incompréhensions des élèves. L'insistance faite sur l'aspect « position » entraîne chez eux une vision très cloisonnée des ensembles unité/dizaine/centaine/millier... Le lien entre l'écriture du nombre et la notion de groupement n'est pas suffisamment mis en évidence.

Les programmes de 2016 semblent cependant s'orienter vers un enseignement plus explicite du principe de la numération décimale de position et l'idée de groupement, qui faisait défaut dans les approches de ces dernières années, est mise en avant. Il s'agit donc bien désormais d'insister sur le sens et le rôle de la numération décimale de position.

Cependant, lorsque l'on compare les nouveaux manuels avec ceux des éditions précédentes, peu de changements apparaissent en numération. L'approche proposée par les éditeurs est la même qu'auparavant.

L'enseignement de la numération au CP

Le CP est une classe charnière dans

l'apprentissage du sens de la numération décimale de position puisque c'est à cette étape de la scolarité que doit s'établir le lien entre l'idée de groupement et la convention d'écriture des nombres. En s'intéressant à la façon dont les manuels de CP conduisent les élèves à la numération écrite chiffrée, Mounier (2010) a montré que l'interprétation que les auteurs font de l'écriture chiffrée est partielle puisqu'ils choisissent de ne pas aborder certaines propriétés de la numération décimale de position. Les principaux éléments qui permettraient aux élèves de comprendre la signification de la numération ne sont pas traités : le choix de la base dix, le fait de faire un maximum de groupements de dix, la signification de la position des chiffres et le rôle du zéro sont des propriétés qui ne sont pas travaillées avec les élèves. Or ce sont pourtant celles-ci qui leur permettraient de comprendre notre système de numération.

Comment enseigner la numération décimale de position en CP ?

Plutôt que de proposer aux élèves de CP d'utiliser la convention d'écriture, il est donc préférable de mettre en place des situations pertinentes qui les amènent à élaborer cette convention et ce, en ayant recours aux groupements. Cela leur donne la possibilité de questionner la signification de chacune des propriétés de la numération. Cette démarche d'apprentissage permet aux élèves d'accéder au sens de la numération décimale de position et de comprendre les aspects spécifiques de la numération écrite.

Nous avons mis en place une séquence d'apprentissage qui s'appuie sur ces éléments et qui s'inscrit dans le cadre de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1988).

Mettre en place des situations pertinentes qui les amènent à élaborer cette convention.

CADRE THÉORIQUE

La théorie des situations didactiques

La théorie des situations didactiques

élaborée par Brousseau à partir des années 70 se définit par la mise en place de situations adidactiques, c'est-à-dire de situations qui permettent aux élèves d'apprendre en s'adaptant à un milieu et en échangeant avec leurs pairs : « un milieu sans intentions didactiques est manifestement insuffisant à induire chez l'élève toutes les connaissances culturelles que l'on souhaite qu'il acquière. La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des « problèmes » qu'il lui propose. Ces problèmes choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. [...] Une telle situation est appelée situation adidactique » (Brousseau, 1998, p. 59).

Classiquement, une situation adidactique comporte :

- une situation d'action où les élèves se constituent une banque de procédures sur lesquelles ils s'appuieront ensuite ;
- une situation de formulation au cours de laquelle les élèves explicitent les procédures qu'ils ont utilisées ;
- une situation de validation où les élèves mobilisent le savoir pour valider les procédures utilisées.

La théorie des situations didactiques accorde de l'importance à l'existence :

- d'un milieu qui, d'une part, renvoie des rétroactions aux élèves et les oblige à accommoder leur procédure de base et, d'autre part, les contraint à construire la connaissance visée (Hersant, 2010) ;
- d'un contrat didactique qui définit les rôles et les attentes des élèves et de l'enseignant, ainsi que la répartition de leur responsabilité dans la production du savoir.

Le contrat didactique

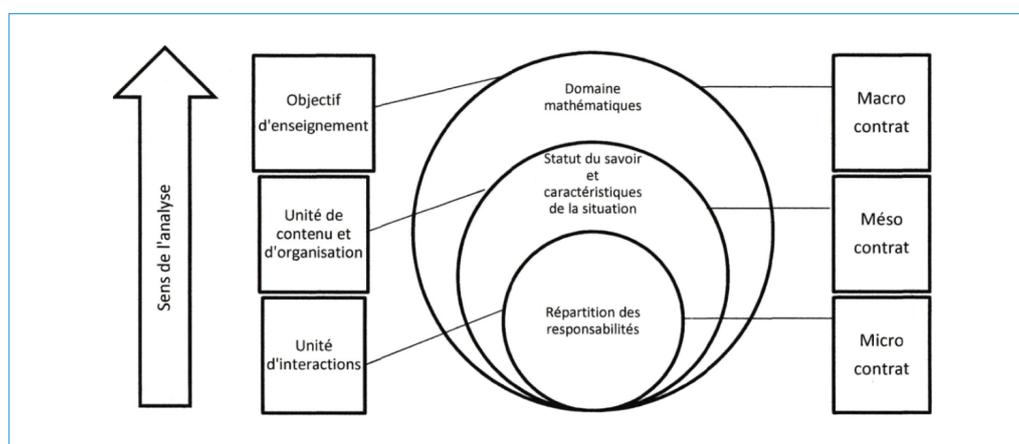
Pour Brousseau (1998), le contrat didactique se caractérise par le partage des responsabilités entre l'ensei-

gnant et les élèves. Hersant (2001) affine cette caractérisation et distingue quatre composantes au contrat didactique : le domaine mathématique dans lequel se situe le problème proposé, le statut du savoir c'est-à-dire son degré de familiarité pour les élèves, la nature et les caractéristiques de la situation didactique et la

répartition des responsabilités entre l'enseignant et les élèves vis-à-vis du savoir.

Hersant (2001) distingue également trois niveaux de structuration du contrat didactique selon le niveau où se situent les activités dans la séance et schématise la structure du contrat didactique de la façon suivante :

FIGURE N°2
Structure du contrat didactique (d'après Hersant, 2001)



D'après Hersant, l'analyse de la nature des micro-contrats et méso-contrats permet de déterminer la nature du contrat didactique dans la classe et de mesurer ainsi les effets des choix de l'enseignant pendant la séance et leur impact sur les apprentissages. A cela peut s'ajouter la notion de facettes mise en évidence par Hersant (2014). Le contrat didactique présente effectivement deux facettes : une facette épistémologique et une facette sociale : « La facette épistémologique du contrat renvoie aux connaissances mathématiques ou portant sur les pratiques des mathématiques. [...] La facette sociale du contrat didactique renvoie quant à elle au fonctionnement de la situation didactique non spécifique du savoir en jeu » (p. 23). L'enseignant peut jouer à la fois sur le milieu et sur le contrat didactique pour maintenir l'adidacticité d'une situation.

La théorie de Brousseau reconnaît également une place fondamentale

à l'institutionnalisation, c'est-à-dire à ce moment d'acculturation où l'enseignant aide les élèves à dépasser la situation vécue pour donner aux connaissances un statut de savoir.

INGÉNIERIE DIDACTIQUE PROPOSÉE

La séquence

La séquence que nous proposons comprend dix séances (cf. annexe 1). L'objectif de cette séquence est de faire comprendre aux élèves de CP la signification du principe de numération décimale de position et notamment la signification de l'écriture chiffrée. Pour cela, nous proposons d'amener les élèves à :

- abandonner le comptage terme à terme au profit d'une stratégie de groupement ;
- comprendre l'intérêt de faire des groupements réguliers de 10 éléments pour dénombrer une grande

Faire comprendre aux élèves de CP la signification de l'écriture chiffrée.

- collection d'objets (en terme d'économie de comptage) ;
- établir le lien entre l'utilisation des groupements par 10 et le codage d'une quantité (c'est-à-dire comprendre que l'utilisation de groupements permet d'écrire directement le nombre d'objets d'une collection) ;
 - comprendre qu'il faut faire un maximum de groupements pour pouvoir déterminer et écrire le nombre d'objets d'une collection ;
 - comprendre la signification des chiffres dans un nombre autrement dit leur valeur en fonction de leur position ;
 - identifier le 0 dans l'écriture d'un nombre comme l'absence d'éléments.

L'analyse a priori

La mise en œuvre de la séquence doit favoriser un apprentissage raisonné du principe de numération décimale de position dans la mesure où elle contraint les élèves à établir des groupements par dix pour coder une quantité et déterminer le nombre d'éléments contenus dans diverses collections. Par les situations auxquelles ils sont confrontés, les élèves sont amenés à questionner la signification de chacune des propriétés de la numération. Il s'agit donc de leur permettre, non plus de simplement utiliser la convention d'écriture, mais de l'élaborer pour mieux en construire le sens. Pour effectuer l'analyse a priori, nous avons mis en évidence ce qui constituait, pour chaque séance, les différents milieux (milieux pour l'action, pour la formulation et pour la validation) et ce que ces milieux permettaient comme contraintes et comme rétroactions aux élèves pour leur permettre de construire les connaissances visées (cf. annexe 2). Cela nous a permis d'analyser la potentialité adidactique des situations proposées afin d'évaluer leur pertinence.

MÉTHODOLOGIE

Constitution du corpus et recueil des données

La séquence a été menée avec douze élèves de CP répartis en trois groupes homogènes. Toutes les séances qui proposaient des activités de recherche ont été filmées et les échanges entre élèves dans les travaux de groupes ont été enregistrés. Les productions écrites des élèves ont également été recueillies pour être analysées.

Méthodologie d'analyse

Pour effectuer l'analyse a posteriori des séances, nous avons d'abord déterminé les conditions effectives dans lesquelles ont été placés les élèves afin de mesurer l'écart avec ce qui était initialement prévu. L'identification des milieux qui ont réellement été proposés, l'analyse de la nature de l'institutionnalisation et l'étude des productions des élèves ont été l'occasion de revenir sur les choix effectués pour construire l'ingénierie et d'évaluer la pertinence des conditions proposées pour la réaliser. Ensuite, nous avons analysé les modifications apportées par l'enseignant et mis en évidence ses actions sur le milieu et sur le contrat didactique. Les notions de composantes du contrat didactique, de niveaux de structuration et de facettes nous ont permis d'affiner cette analyse (cf. annexe 3) et de déterminer précisément la nature des modifications apportées par le professeur au cours de chacune des séances.

ANALYSE

L'objectif de la séquence était de favoriser un apprentissage raisonné du principe de numération décimale de position, c'est-à-dire un apprentissage qui permette aux élèves d'élaborer la convention d'écriture en ayant recours aux groupements et non en l'utilisant simplement. Or cet objectif n'a été que partiellement atteint. En effet, l'analyse des productions des élèves a montré que, pour

dénombrer une collection, ils n'ont pas recours spontanément à la procédure de groupement. Le comptage reste, pour beaucoup, la procédure la plus appropriée puisqu'ils maîtrisent assez-bien la suite numérique.

Le niveau de maîtrise de la comptine numérique apparaît comme un frein à l'apprentissage.

Seul un élève, qui ne maîtrisait pas la comptine numérique et ne savait pas écrire les grands nombres, a vu l'utilité de mobiliser

le nouveau savoir : faire des groupements de 10 pour ensuite coder/écrire la quantité d'objets. Pour les autres, ce savoir n'est pas opératoire : ils peuvent l'utiliser lorsqu'on leur demande mais ne le font pas spontanément.

Par conséquent, il ressort de ce travail que certains choix initiaux de l'ingénierie ne sont pas appropriés et que la séquence mise en place ne conduit pas suffisamment les élèves à élaborer la convention d'écriture. Les conditions proposées leur permettent effectivement de s'approprier la signification des propriétés de la numération et d'utiliser la convention d'écriture mais pas d'en construire véritablement le sens à l'issue de la séquence. Cela s'explique par le fait que certaines situations manquent d'adidacticité parce qu'elles ne contraignent pas les élèves à abandonner le comptage au profit de l'utilisation des groupements par 10 et parce qu'elles ne prennent pas en compte toutes les difficultés inhérentes à l'apprentissage de la numération et à son enseignement. Cela est également dû aux modifications que l'enseignant a apportées aux séances initialement prévues. En effet, notre analyse (cf. annexe 3) met en évidence de nombreuses interventions de l'enseignant pour maintenir dans le milieu la procédure de comptage un à un, notamment dans la première situation de la séquence, ce qui, par effet de contrat, ne laisse pas aux élèves la possibilité d'envisager d'autres procédures comme les groupements par paquet de 10.

DISCUSSION

Les conclusions de l'analyse nous amènent à revenir sur l'ingénierie didactique afin d'identifier la nature des difficultés relevées.

Le niveau de connaissances des élèves

Le niveau de connaissances des élèves a posé problème dans la séquence proposée. En effet, comme la plupart d'entre eux maîtrisaient assez bien la comptine numérique, ils ne se sont pas emparés de la procédure de groupement. Ils ont préféré compter un à un les éléments pour dénombrer les collections d'objets. Ainsi, le niveau de maîtrise de la comptine numérique apparaît comme un frein à l'apprentissage dans cette ingénierie didactique. Il aurait donc été préférable d'écarter la procédure de comptage dès la première séance afin d'obliger les élèves à faire autrement.

Le changement de statut du nombre

Cette étude a mis en évidence les difficultés liées au changement de statut du nombre. Il n'est effectivement pas aisé pour des élèves de CP de travailler sur les deux aspects du nombre : l'aspect outil et l'aspect objet (Douady, 1987). Les élèves des classes supérieures sont capables de distinguer les séances de numération, où l'on s'intéresse au nombre en tant qu'objet, des séances d'arithmétique, où l'on travaille avec le nombre en tant qu'outil. Mais cette distinction est plus difficile à opérer pour des élèves plus jeunes d'autant que c'est la première fois qu'ils ont à le faire. Ce changement de statut a perturbé les élèves dans leur apprentissage mais également l'enseignant. Pour aider les élèves à passer d'un aspect à l'autre, sans doute faudrait-il clarifier les attentes aux différents moments de la séance.

L'enseignement du principe de numération décimale de position

Il apparaît clairement, à travers ce travail, qu'il est difficile d'enseigner une

convention d'écriture et notamment de proposer aux élèves des situations qui leur permettent de construire les règles de la numération écrite chiffrée. Quelles situations proposer pour que l'élaboration de la convention d'écriture devienne une nécessité comme cela a été le cas pour les hommes dans le passé ? Cela n'est pas simple à l'échelle des CP car il n'est pas possible de complexifier davantage les situations problèmes. Ce constat explique certainement le fait que les manuels proposent davantage de situations qui font utiliser la convention d'écriture plutôt que la construire.

La communication d'une ingénierie didactique

Une autre difficulté rencontrée est la communication d'une ingénierie didactique à un enseignant. En effet, bien que des fiches de préparation détaillées aient été fournies à l'enseignant et que les séances lui aient été présentées en amont, le professeur a apporté des modifications qui ont eu un impact sur le déroulement des séances tel qu'il était initialement prévu. On retrouve ici la difficulté qu'il y a à communiquer une ingénierie didactique à un enseignant

Une autre difficulté rencontrée est la communication d'une ingénierie didactique à un enseignant.

qui a ses propres pratiques (Artigue, 2011). La théorie des situations didactiques porte sur l'apprentissage de savoirs dans des situations. Elle ne prend pas en compte certaines contraintes d'enseignement (notamment le temps didactique et les habitudes de classe) et nécessite que l'enseignant inscrive sa pratique dans cette épistémologie de la discipline et des apprentissages. C'est là une des limites de cette théorie.

CONCLUSION

Ce travail a permis de mettre en évidence un certain nombre d'éléments qu'il importerait de prendre en compte pour concevoir une nouvelle ingénierie didactique qui permette de favoriser plus efficacement un ap-

prentissage raisonné du principe de numération décimale de position au CP.

Les obstacles à l'apprentissage de la numération

L'analyse de la séquence a fait émerger ce qui résiste à l'apprentissage du principe de numération décimale de position chez les élèves de CP et ce qu'il faudrait davantage considérer pour aborder cette notion. Nous avons pointé :

- le niveau de connaissances des élèves et leur trop bonne maîtrise de la comptine numérique ;
- les difficultés d'énumération de certains élèves et la nécessité de ne pas considérer cette compétence comme allant de soi ;
- le problème de la dialectique outil/objet qui apparaît comme une résistance supplémentaire dans la mesure où le changement de statut du nombre perturbe les élèves.

Ce dernier point nous amène à questionner l'usage du terme «compter» car son usage contribue à limiter l'effet de certaines situations en induisant forcément la procédure de comptage au détriment de celle de dénombrement par groupement.

Le problème de l'enseignement d'une convention d'écriture

Nos résultats viennent confirmer les conclusions de recherche de Mounier (2010) concernant les difficultés à enseigner la convention d'écriture chiffrée des nombres. Il apparaît effectivement compliqué de placer les élèves de CP dans des situations leur permettant de réinventer la convention d'écriture existante, et ce, dans un temps relativement restreint. Cette réflexion nous amène à considérer l'enseignement des autres conventions, celles des unités de mesure de masse ou de contenance par exemple, car les élèves doivent éprouver les mêmes difficultés à construire le sens de ces conventions.

Cela soulève également la question de la pertinence des situations-problèmes pour enseigner une convention. Puisque les élèves peuvent dif-

facilement produire la connaissance visée et qu'ils se voient imposer l'utilisation de la procédure de groupement pour dénombrer et coder une quantité, quel intérêt y a-t-il à leur proposer une situation-problème ? Ne faudrait-il pas préférer un temps d'entraînement ? La question de l'usage des situations-problèmes pour l'enseignement-apprentissage de toutes les notions mathématiques se pose ici.

Les aspects méthodologiques de la mise en œuvre d'une ingénierie didactique

Nous pointons dans cette étude, les limites méthodologiques que pose la mise en œuvre d'une ingénierie didactique, relevant du cadre de la théo-

rie des situations didactiques, par un enseignant ayant déjà des habitudes de travail. Il apparaît clairement que communiquer une ingénierie didactique suppose aussi de communiquer les enjeux du savoir pour s'assurer que l'enseignant en ait bien conscience et ne détourne pas les situations proposées. Mais il serait également intéressant de proposer des ingénieries qui s'adaptent davantage aux enseignants, à leur pratique et à leurs contraintes afin de s'assurer qu'elles soient plus efficaces et surtout plus facilement applicables. Les travaux en cours sur les ingénieries dites « de seconde génération » (Perrin-Glorian, 2011, Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian, 2017) devraient y contribuer ■

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la 15^{ème} Ecole d'Eté de didactique des mathématiques* (Margolinas et al, p. 15 25). Grenoble: La pensée sauvage.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1984). La numération (Première partie). *Grand N*, 33, 5-30.

Briand, J., Lacave-Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D., & Goua de Baix, V. (1999). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N*, 66, 7-22.

Brousseau, G. (1988). Didactique fondamentale, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire*, Actes de l'université d'été. Bordeaux : I.R.E.M de Bordeaux

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques ; didactiques des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La pensée sauvage.

Charnay, R. (2013). *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale ? De la PS au CM2*. Paris : Hatier.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5 31.

Hersant, M (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Paris 7, Paris. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/122340/filename/these_Hersant.pdf

Hersant, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations didactiques*. (Note de synthèse des travaux d'HDR). Université de Nantes.

Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 9-31.

Mangiante-Orsola, C., & Perrin-Glorian, M. J. (2017). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes - Denain. In *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de 2016* (Barrier et Chambris, p. 35-57). ARDM. Consulté à l'adresse https://ardm.eu/wp-content/uploads/2017/02/pre_actes_seminaire_ARDM_janvier_2016.pdf

MEN (2008). Horaires et programme d'enseignement de l'école primaire. *BO n°3 du 19 juin 2008*. Paris : CNRP.

MEN (2016). Horaires et programme d'enseignement de l'école primaire. *BO n°11 du 26 novembre 2015*. Paris : CNRP

Mounier, E. (2010). Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes. (Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, France)

OCDE/PISA. (2012). *Principaux résultats de l'Enquête PISA 2012*. Repéré à <https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview-FR.pdf>

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche et de l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (C. Margolinas et al., p. 57-78). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, 86, 59-90.

Vergnaud, G. (2011). Au fond de l'action, la conceptualisation, in J-M. Barbier, *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275-292). Paris : PUF.

ANNEXES

ANNEXE N°1

Progression de la séquence de numération proposée en CP

Classe de CP	NOMBRES		Période 3
Progression Mathématiques	Le principe de numération décimale de position		Séquence de 10 séances
<p><u>Connaissances et compétences associées :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer <ul style="list-style-type: none"> - Dénombrer, constituer et comparer des collections - Utiliser diverses stratégies de dénombrement • Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers <ul style="list-style-type: none"> - Utiliser diverses représentations des nombres - Passer d'une représentation à une autre, associer les noms des nombres à leurs écritures chiffrées - Interpréter les noms des nombres à l'aide des unités de numération et des écritures arithmétiques <p><u>Objectifs de connaissances et de compétences pour la maîtrise du socle commun :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Domaine 1 «Les langages pour penser et communiquer» <ul style="list-style-type: none"> - Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques • Domaine 4 «Les systèmes naturels et les systèmes techniques» : <ul style="list-style-type: none"> - Démarches scientifiques 			
Séances	Objectifs	Activités	Supports
1	Abandonner le comptage terme à terme au profit d'une procédure de groupements pour dénombrer efficacement une collection importante d'objets.	<p>Les allumettes (1)</p> <p><u>Dénombrement d'allumettes :</u></p> <ol style="list-style-type: none"> Faire dénombrer une collection importante d'allumettes. Recenser les réponses et les stratégies utilisées. En déduire la procédure la plus efficace. <p>→ Pour dénombrer une grande collection d'objets, une des procédures les plus efficaces est de faire des paquets.</p>	Allumettes
2	<p>Comprendre l'intérêt de faire des groupements réguliers de dix éléments pour dénombrer une grande collection d'objets</p> <p>Etablir le lien entre l'utilisation des groupements par dix et l'écriture d'un nombre.</p>	<p>Les allumettes (2)</p> <p><u>Dénombrement d'allumettes rangées par paquets :</u></p> <ol style="list-style-type: none"> Reprendre l'activité de dénombrement d'allumettes en proposant aux élèves des paquets de 8 ou de 10 et des allumettes à l'unité. Recenser les réponses au tableau en demandant aux élèves de venir inscrire leurs résultats. Faire comparer les deux situations (paquets de 8 et paquets de 10) afin de mettre en évidence l'intérêt des paquets de 10 pour trouver le nombre total d'objets. <p>→ Faire des paquets de 10 est la procédure la plus économique car elle permet de connaître directement le nombre total d'objets et de l'écrire. Le chiffre de gauche représente le nombre de paquets de 10 et le chiffre de droite, le nombre d'objets à l'unité.</p>	Allumettes dans des enveloppes et allumettes à l'unité

Séances	Objectifs	Activités	Supports
3	<p>Dénombrer une collection importante d'objets et écrire le nombre correspondant.</p> <p>Comprendre et utiliser la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre.</p>	<p>Des quantités d'objets...</p> <p><u>Dénombrement de différentes quantités d'objets :</u> Proposer aux élèves de dénombrer des collections importantes d'objets. Leur demander de coder cette quantité et de l'inscrire dans un tableau afin de comparer leur réponse avec celles des autres élèves.</p> <p>→ Pour dénombrer, il est plus efficace de faire des paquets de 10 pour trouver directement le nombre d'objets d'une collection : on écrit à gauche le nombre de paquets de 10 et à droite le nombre d'objets à l'unité. S'il n'y a pas d'objets à l'unité, on écrit 0 à droite.</p> <p><u>Exercice d'entraînement :</u> Exercice de dénombrement et de codage : dénombrer des points en faisant des paquets de 10 et écrire le nombre correspondant en chiffres.</p>	<p>Différents objets + Exercice avec les points Cap-Maths</p>
4	<p>Comprendre et utiliser la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre.</p>	<p>Le ziglotron (1)</p> <p><u>Décodage de nombres = la commande de boutons :</u></p> <p>a. Faire dénombrer les boutons manquants du ziglotron et demander aux élèves de passer une commande auprès du marchand en l'exprimant en paquets de 10 boutons et boutons isolés. b. Recenser les réponses au tableau et les procédures utilisées. Les faire discuter quant à leur validité et leur efficacité. c. Mettre en évidence de l'efficacité de certaines procédures par rapport à d'autres et revenir sur la notion de décodage en lien avec la signification des chiffres dans un nombre.</p> <p>→ Quand on a trouvé le nombre de boutons manquants : - Pour trouver le nombre de paquets de 10, on regarde le chiffre de gauche dans un nombre à deux chiffres. - Pour trouver le nombre de boutons à l'unité, on regarde le chiffre de droite.</p>	<p>Le Ziglotron CapMaths</p>
5	<p>Comprendre et utiliser la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre.</p>	<p>Le ziglotron (2)</p> <p><u>Exercices d'entraînement :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - dénombrer une collection de boutons et compléter un bon de commande ; - dénombrer une quantité de points et trouver le nombre correspondant en chiffres ; - écrire le nombre total de boutons commandés à partir d'un bon de commande complété ; - à partir d'un nombre écrit en chiffres, compléter un bon de commande (déterminer le nombre de paquets de 10 et le nombre d'objets à l'unité). 	<p>Le Ziglotron CapMaths + Exercices marchand-CapMath</p>

Séances	Objectifs	Activités	Supports
6 - 7	Consolider les acquis sur la compréhension et l'utilisation de la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre.	<p>Des boutons, des chocolats, ...</p> <p>Exercices d'entraînement : Proposer des exercices de codage et décodage de quantités d'objets (objets représentés) :</p> <ul style="list-style-type: none"> - à partir d'un nombre écrit en chiffres, déterminer le nombre de paquets de 10 et le nombre d'objets à l'unité ; - trouver le nombre total d'objets à partir d'une commande exprimée en paquets de 10 et objets isolés ; - coder une quantité à partir d'un dessin de paquets de 10 et d'objets isolés ; - entourer une quantité en fonction d'un nombre écrit en chiffres. <p>→ Rappel des éléments mis en évidence lors des séances précédentes si besoin.</p>	Exercices Dizaines et unités Chocolats CapMaths
8	Utiliser la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre. Comprendre qu'il faut faire un maximum de groupements pour pouvoir déterminer et écrire le nombre d'objets d'une collection.	<p>Les craies</p> <p><u>Dénombrement de craies avec des unités > 10 :</u></p> <ol style="list-style-type: none"> a. Faire dénombrer et écrire en chiffres une quantité de craies dont certaines sont déjà regroupées en paquets de 10 (Exercice sur une feuille). b. Recenser les réponses au tableau et les procédures utilisées. Les faire discuter quant à leur validité. c. Mettre en évidence l'importance de faire un maximum de groupement. <p>→ Pour bien compter, il faut faire un maximum de paquets de 10. L'ordre des chiffres dans un nombre est très important.</p> <p><u>Exercice d'entraînement :</u> Exercice sur le même modèle que l'activité précédente : dénombrer une quantité de craies en faisant un maximum de groupements.</p>	Les craies
9	Consolider les acquis sur la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre.	<p>Les timbres et les os</p> <p><u>Dénombrement d'objets :</u> Proposer des exercices de dénombrement et de codage de quantités pour permettre le réinvestissement des connaissances.</p> <p>→ Rappel des éléments mis en évidence lors des séances précédentes si besoin.</p>	Exercices Timbres et os CapMaths
10	Evaluer les connaissances des élèves sur le principe de la numération décimale de position et en particulier sur l'écriture des nombres.	<p>Evaluation (craies, bons de commande)</p> <p><u>Dénombrement d'objets :</u> Proposer des exercices de codage et décodage de quantités d'objets sur le même modèle que ce qui aura été fait pendant la séquence.</p>	Feuilles évaluation

ANNEXE N°2

Analyse a priori pour la séance n°1 «Les allumettes»

Milieux	Contraintes et rétroactions du milieu
<p>Milieu pour l'action (par groupe) :</p> <p>→ <u>Ce qui est commun</u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> - les 67 allumettes par groupe ; - le principe de dénombrement par comptage. <p>→ <u>Ce qui diffère en fonction des groupes</u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> - les compétences d'énumération ; - la connaissance des nombres (jusqu'à 15/20 pour le groupe C, jusqu'à 39 pour le groupe B et au-delà de 39 pour le groupe A) ; - la capacité à écrire les nombres jusqu'à un certain rang. 	<p>Différents cas sont envisageables :</p> <p>Les nombres ne sont pas connus au-delà d'un certain rang (15, 20 ou 39) donc le comptage n'est pas possible → il faut trouver une autre façon de dénombrer.</p> <p>Les nombres sont connus jusqu'à 67 mais leur écriture n'est pas maîtrisée → il faut trouver une façon de coder le nombre.</p> <p>Les nombres sont connus jusqu'à 67 mais le comptage sans se tromper est difficile (difficultés d'énumération) → il faut trouver une façon d'organiser le comptage.</p> <p>Les nombres sont connus jusqu'à 67 mais le comptage est long et fastidieux → il faut trouver une façon d'être plus rapide.</p>
<p>Milieu pour l'action (par groupe) :</p> <p>→ <u>Ce qui est commun</u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> - les 67 allumettes de chaque groupe ; - les résultats des différents groupes ; - le principe de dénombrement par comptage ; - les autres procédures mises en œuvre lors de la phase d'action (dont la procédure de groupement, à priori). <p>→ <u>Ce qui diffère en fonction des groupes</u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> - les compétences d'énumération ; - la connaissance des nombres (jusqu'à 15/20 pour le groupe C, jusqu'à 39 pour le groupe B et au-delà de 39 pour le groupe A). 	<p>Plusieurs réponses sont trouvées alors que chaque groupe avait le même nombre d'allumettes → ce n'est pas possible.</p> <p>Il y a donc eu des erreurs dans le dénombrement. Il faut vérifier les résultats et l'efficacité des procédures utilisées.</p> <p>Parmi les procédures utilisées, certaines conduisent plus facilement à des erreurs (celle du dénombrement par comptage terme à terme notamment car toutes les allumettes n'ont pas été comptées).</p> <p>D'autres (celles qui consistent à faire des groupements) sont faciles à mettre en œuvre et efficaces.</p>
<p>Milieu pour la validation (pour la classe) :</p> <p>→ <u>Ce qui est commun</u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> - les 67 allumettes de chaque groupe ; - les procédures valides. <p>→ <u>Ce qui diffère en fonction des groupes</u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> - les compétences d'énumération ; - la connaissance des nombres (jusqu'à 15/20 pour le groupe C, jusqu'à 39 pour le groupe B et au-delà de 39 pour le groupe A). 	<p>La procédure qui consiste à faire des groupements est la plus efficace et la plus facile à mettre en œuvre. Elle permet de trouver 67 avec moins de risque d'erreurs que le comptage.</p>

ANNEXE N°3

Analyse a posteriori de la séance n°1 «Les allumettes»

Le tableau ci-dessous présente les différents épisodes de la séance n°1 et les micro-contrats mis en place par l'enseignant ainsi que ses actions sur le milieu et sur les facettes du contrat didactique :

Episode	Titre	Micro contrat	Action sur le milieu	Action sur les facettes du contrat
1 N°1 à 25	<u>Présentation de l'activité</u>		Compléter le milieu matériel pour l'action (Colle, scotch...).	Facette sociale : suggérer l'utilisation de matériel (2 fois).
2 N°26 à 187	<u>Activité de recherche : Dénombrement des allumettes</u>	Production individuelle	«Perturber» le milieu pour induire un changement de procédure (3 fois).	/
3a N°188 à 207	<u>Mise en commun :</u> a. Inventaire des procédures	Production collective	/	/
3b N°208 à 210	b. Retrait d'une procédure erronée	Adhésion	Retirer une procédure inexploitable.	/
3c N°211 à 265	c. Remise en cause de l'efficacité de la procédure de comptage	Production collective	Pointer les dysfonctionnements de la procédure de comptage. Mettre en évidence une erreur.	/
4 N°266 à 306	<u>Validation :</u> Recherche de la bonne réponse par comptage	Production collective	Renforcer la procédure de dénombrement terme à terme en facilitant son utilisation. Maintenir dans le milieu la procédure de comptage. Mettre l'accent sur l'organisation de la collection pour le comptage.	/