Entrée dans l'algèbre en $5^{ème}$

Analyse de séances pour identifier des conditions favorables ou des obstacles à la production d'une modélisation algébrique.

RÉSUMÉ

La pratique de l'algèbre au collège engage les élèves dans un travail autour de la pensée algébrique (concept de variables, dualité des symboles) et du formalisme syntaxique. Cette étude s'intéresse au travail d'élèves de $5^{ème}$ auxquels on demande, pour la première fois, de produire une réponse générale relevant de l'algèbre à un problème. Il s'agit notamment d'étudier comment les élèves s'emparent de la situation et élaborent des réponses adaptées. Le cadre didactique de la problématisation permet de rendre compte des raisons construites par les élèves pour produire une modélisation algébrique. La conception de deux situations suivie de l'analyse du travail de groupes d'élèves permet de mettre à jour des obstacles de natures diverses, mais également des éléments facilitateurs pour l'entrée dans l'algèbre.

Géraldine **PLANSON-JAVEL**,
Master MEEF
Mention PIF
Parcours Enseignement
Expertise Apprentissage
ESPE Académie de Nantes

MOTS CLÉS :

problématisation, algèbre élémentaire, modélisation algébrique, obstacle, contrat didactique.

INTRODUCTION

L'algèbre telle que nous la connaissons aujourd'hui est le fruit d'une évolution lente où l'éclosion du concept abstrait de nombre a permis au fil des siècles de développer des théories générales. La construction des concepts a été également doublée d'un travail sur le formalisme syntaxique.

> Les mathématiques travaillent sur des objets conceptuels et sur les raisonnements logiques entre ces concepts.

Pour les collégiens, le travail algébrique revêt différentes formes. La résolution de problèmes peut notamment les conduire à construire des conjectures qu'il faudra prouver dans un second temps. Les savoirs alors mobilisés dans ce travail n'ont pas tous la même nature. Ils relèvent à la fois d'une démarche de preuve (recours au contre-exemple, raisonnement par disjonction des cas) et de la mise en œuvre d'une modélisation algébrique (Chevallard, 1989) de la situation. Ce travail s'accompagne également de maniement formel d'écritures (transformation d'écriture à l'aide de la distributivité, résolution d'équations).

Dans ce contexte, les élèves peuvent rencontrer différentes difficultés. Il y a tout d'abord une rupture entre la pratique de l'arithmétique et l'algèbre élémentaire (Gascon, 1994). Les lettres, le symbole d'égalité prennent alors différentes significations (résultat d'un calcul, permanence d'une égalité, inconnue, paramètre, variable). Le travail sur la rationalité des démarches est aussi source de difficultés.

Dans le travail que nous présentons, nous nous intéresserons à la première fois où une démarche de généralisation algébrique est demandée à des élèves de 5e. Cette démarche appelle un travail où les éléments pertinents de la situation doivent être relevés et articulés. Il faut également réfléchir à la formalisation écrite pour s'affranchir des lourdeurs ou des imprécisions du langage naturel. Nous nous sommes ainsi particulièrement intéressées aux conditions d'entrée dans une démarche algébrique avec la recherche d'éléments facilitateurs ou d'obstacles aussi bien d'ordre épistémologique que d'ordre didactique.

EPISTÉMOLOGIE DES SAVOIRS MATHÉMATIQUES

Nature des savoirs scientifiques et mathématiques

Pour Fabre et Orange (1997), les trois principales caractéristiques des savoirs scientifiques sont les suivantes :

- Les savoirs scientifiques sont des compétences. Ils ne sont pas juste une description du réel, mais ils permettent de comprendre, d'expliquer et donc de maîtriser les problèmes. Ainsi, le caractère épistémologique du savoir scientifique est lié au franchissement d'obstacle.
- Les savoirs scientifiques sont des savoirs raisonnés. Ils présentent un caractère de nécessité et d'universalité s'opposant ainsi à l'opinion.
- Les savoirs scientifiques sont partagés et soumis à la critique. Ces savoirs ont donc vocation à être mis à l'épreuve des modèles et des règles, mais ils ont aussi pour finalité de produire d'autres savoirs.

Les savoirs mathématiques, tout en répondant aux caractéristiques mentionnées ci-dessus, ont également une forte dimension abstraite. En effet, les mathématiques travaillent sur des objets conceptuels et sur les raisonnements logiques entre ces concepts (nombres, figures, structures...). Pour autant, elles sont aux prises avec le réel, car elles ont trouvé leurs racines dans le réel. Elles proposent également des applications dans les autres sciences (physique, chimie, etc.) qui étudient les phénomènes concrets.

Les savoirs mathématiques enseignés

L'activité mathématique, en tant qu'activité scientifique, est tournée vers la résolution de problèmes au cours de laquelle sont mobilisés des éléments théoriques. En classe, lors des résolutions de problèmes, à partir des premiers résultats, les élèves sont amenés à produire des conjectures (par induction, par essai/erreur). Dès lors qu'une conjecture semble robuste, elle doit être prouvée (à l'aide de règles dont la véracité est établie ou d'axiomes déclarés vrais) ou invalidée (en algèbre, l'utilisation du contre-exemple est fréquente pour infirmer une égalité). Nous retrouvons ici la rationalité de la démarche qui garantit la construction de savoirs scientifiques. Ainsi lors de la résolution de problème, les élèves et les enseignants manipulent aussi bien des savoirs notionnels que des savoirs liés à la démarche mathématique sans que ces derniers ne fassent l'objet d'un apprentissage explicite ou d'une institutionnalisation.

UN CADRE THÉORIQUE : LA PROBLÉMATISATION

Problématisation et algèbre

Les obstacles s'organisant souvent en modèles implicites (Brousseau, 1989), le franchissement d'obstacles ne peut se faire sans une formulation explicite, notamment à l'aide du conflit socio-cognitif, et cela constitue en soi un objectif du projet didactique. Les circonstances de l'apprentissage sont également importantes pour la pérennisation des savoirs. Le cadre didactique de la problématisation permet de rendre compte de façon explicite du franchissement d'obstacles. Pour Fabre et Orange (1997, p.38) « *ce processus [de problématisation] transforme un problème perçu en un problème construit ou, plus généralement, en un ensemble articulé de problèmes construits (problématique)* ». Ainsi ce cadre permet de rendre compte de ce qui s'est passé explicitement entre le problème posé et le problème résolu. Pour Gascon (1994, p.55), l'algèbre de Viète et la géométrie de Descartes proposent « une introduction systématique de la représentation littérale, aussi bien pour désigner les quantités inconnues que les quantités connues, ce qui présente l'avantage de traiter des cas généraux et de pouvoir s'intéresser à la structure du problème et non seulement à la simple obtention de l'inconnue ». Nous retrouvons ici l'idée que ce qui importe n'est pas la solution du problème, mais la construction du problème visant à faire émerger ce qui est de l'ordre du nécessaire en articulation avec ce qui est de l'ordre de la contingence. Ainsi le cadre de la problématisation semble être un outil adapté pour étudier les phénomènes didactiques liés au travail sur la modélisation algébrique.

Ainsi ce cadre permet de rendre compte de ce qui s'est passé explicitement entre le problème posé et le problème résolu.

Pour un élève qui débute en algèbre, l'idée qu'une lettre puisse représenter à la fois ce qui est connu et ce qui est inconnu de même que la nouvelle dualité des symboles utilisés (signe d'égalité, signes des opérations) va constituer un obstacle épistémologique, mais peut être aussi un obstacle didactique : un réaménagement du contrat didactique sera peut-être nécessaire. Nous faisons l'hypothèse que les conversions à opérer entre différents registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) (langage naturel, programme de calcul, formule) afin de formuler de façon explicite la construction du problème permettront aux élèves de conceptualiser la notion de modélisation algébrique.

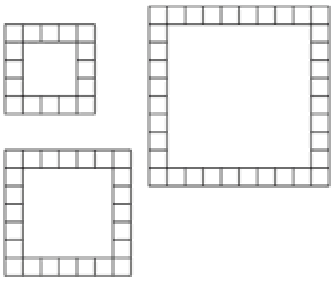
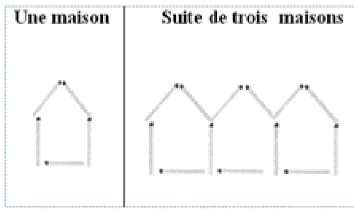
Problématisation et algèbre

Selon Orange (2012), l'activité scientifique qui, comme nous l'avons vu, vise la construction de problèmes, peut être catégorisée en trois registres : le registre empirique, le registre des modèles et le registre explicatif. Pour rendre compte du processus de problématisation le chercheur étudie la façon selon laquelle les élèves ont mis en relation, mis en tension les différents éléments du registre empirique avec les éléments du registre des modèles. Le registre empirique comporte tout ce qui relève de la contingence. Ce sont des éléments de la situation ou construits par les élèves et jugés pertinents pour le problème. Le registre des modèles (aussi appelé registre des nécessités) est constitué des explications construites pour rendre compte des faits préjugés pertinents c'est-à-dire les nécessités du problème. En mathématiques, les modèles peuvent être de différentes natures : des modèles liés à des notions (par exemple : le périmètre d'une figure) ou des modèles de raisonnement (par exemple : une démonstration). Ces modèles utilisés par les élèves prennent leurs sens dans la situation, car ils sont convoqués au sein d'un registre explicatif. En mathématiques, le registre explicatif peut être entendu comme cadre au sens de Douady (1986). Ainsi les élèves pourront mobiliser le cadre algébrique, le cadre de la géométrie métrique, de la géométrie affine comme registre explicatif.

LE CONTEXTE DE L'ÉTUDE

L'objectif de notre travail est d'amener les élèves à proposer une modélisation algébrique d'une situation donnée (schéma n°1). C'est donc le cadre algébrique qui doit être convoqué par les élèves.

SCHÉMA N°1
Enoncés des deux exercices proposés

Exercice des carrés de Pierre	Exercice des allumettes
Pierre joue avec des carreaux de mosaïques de couleur. Il dispose ses mosaïques pour obtenir des « carrés ».  Il voudrait savoir à l'avance combien de carreaux de mosaïques il lui faut pour fabriquer n'importe quel « carré ». Comment l'aider ?	Paula construit des maisons identiques avec des allumettes  Elle voudrait savoir à l'avance combien d'allumettes il lui faudrait pour construire n'importe quelle « suite de maisons ». Comment l'aider ?

D'un point de vue épistémologique, les élèves vont devoir prélever dans une situation des éléments pertinents et les mettre en relation (en fonction des nécessités du problème). Nous faisons l'hypothèse que les élèves seront confrontés à deux problèmes : celui de la conceptualisation algébrique de sorte à pouvoir prendre en charge le caractère général de la réponse attendue et ensuite le problème de la communicabilité de la réponse produite. Par communicabilité nous entendons, la possibilité qu'une personne étrangère au travail du groupe d'élèves puisse comprendre et mettre en œuvre la réponse donnée au problème. Il ne doit donc pas y avoir d'ambiguïté sur la réponse produite. Les élèves pourront mobiliser divers registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) tels que le langage naturel, l'écriture d'une formule algébrique ou l'écriture d'un programme de calcul.
D'un point de vue cognitif, il peut y

avoir une difficulté à comprendre le concept de « n'importe lequel ». En langage mathématique « n'importe lequel » porte une notion d'universalité au sens de « celui qui porte en lui les caractéristiques générales de la situation ». Nous retrouvons donc ici l'idée de modélisation algébrique (Chevallard, 1989) : il s'agit à partir d'une situation de la vie courante d'extraire des éléments pertinents (les variables par exemple), puis de mettre ces éléments en relation et, dans un dernier temps, de travailler sur ses relations à l'aide des propriétés algébriques de manière à produire de nouvelles connaissances sur la situation initiale. Dans la vie courante « n'importe lequel » porte plutôt l'idée de « celui qu'on choisit au hasard », ce qui est très différent.

Nous cherchons à agir sur les deux leviers que sont la généralisation d'une situation donnée et la communication de la réponse donnée.

D'un point de vue didactique, au collège, en classe de sixième, les élèves ont déjà travaillé avec des formules en lien avec le travail sur les grandeurs et les mesures. La plupart du temps, ils n'ont pas eu à élaborer ces formules et les lettres utilisées dans les formules sont mobilisées en tant que raccourcis d'écriture. Le travail demandé alors consiste à mobiliser la bonne formule dans une situation donnée et à affecter les valeurs adéquates aux variables des formules. Les élèves ont également travaillé sur les programmes de calcul où le concept de variable est implicite. Le mot « formule » est convoqué pour programmer une cellule de tableur. Il ne s'agit pas d'une formule algébrique puisqu'à tout instant des valeurs sont affectées aux variables informatiques mises en jeu.

Conception de la situation

Pour contraindre l'entrée dans l'algèbre, nous cherchons à agir sur les deux leviers que sont la généralisation d'une situation donnée et la communication de la réponse donnée (Chevallard, 1989 ; Gascon, 1994). Le travail proposé aux élèves est un travail de groupes pour lequel les groupes ne travaillent pas sur le même énoncé (deux énoncés différents, schéma n°1), mais sont amenés à échanger par écrit. Dans chacun des deux problèmes, les élèves doivent répondre à la question « comment l'aider ? » sur une fiche navette qui sera ensuite envoyée à un groupe n'ayant pas travaillé sur le même énoncé. Le travail de groupe est sollicité pour amener un débat et provoquer, nous l'espérons, une problématisation de la situation.
Le travail est organisé en deux séances. La première, d'une durée de 45-50 minutes, est composée de travaux de groupe une fois la consigne de travail passée par le professeur. La deuxième séance d'une durée de 45-50 minutes est articulée entre temps de mise en commun en classe entière et phase de travaux de groupes et individuels.

Analyse a priori des situations

La première dimension du travail doit permettre aux élèves de convoquer le registre explicatif de l'algèbre. Nous avons analysé nos deux situations en prenant appui sur la liste de conditions sur les problèmes proposée par Douady (1986, p.19) pour déclencher une dialectique outil-objet et le jeu de cadres. Dans chacune des deux situations, la généralisation est appelée par l'expression «n'importe quel ». Les élèves ont à disposition des dessins pour comprendre la situation, mais aussi pour pouvoir disposer d'exemples sur lesquels prendre appui pour mener une démarche expérimentale.
Bien qu'inadapté à la situation, le concept de périmètre emprunté au cadre de la géométrie métrique pourra être convoqué par les élèves en tant qu'outil et, s'il est « retravaillé » (confronté au problème des chevauchements entre les coins des carrés ou des murs mitoyens des maisons), il pourra donner lieu à une modélisation algébrique de la situation. Dans ce cas, c'est bien le registre explicatif de l'algèbre qui aura sous-tendu la construction du problème. Nous pouvons aussi envisager une démarche dite « de proche en proche » où les

élèves comprennent que lorsqu'on rajoute un petit carré sur le côté il y en a quatre de plus autour ou que lorsqu'on rajoute une maison, il faut ajouter quatre allumettes. Cette démarche correspond à une prise en charge partielle du problème, mais n'est pas efficace, elle relève du cadre arithmétique.
La seconde dimension du travail porte les élèves vers un formalisme syntaxique. Le dispositif choisi (fiche navette, travaux différents selon les groupes) vise à contraindre les élèves à produire en groupe une réponse écrite compréhensible par d'autres que les membres du groupe.
La deuxième séance a ainsi pour objectifs de faire le point sur les démarches des élèves : solliciter la classe pour invalider des démarches erronées s'il y en a, mettre en avant les variables pertinentes pour le problème de sorte à accompagner le processus de modélisation algébrique, amener la réflexion sur la forme de la réponse à produire et enfin comprendre la portée du résultat construit.

MÉTHODOLOGIE

Recueil des données

Nous avons étudié le travail de quatre groupes de trois ou quatre élèves répartis sur deux classes de 5e (deux groupes dans chaque 5e). Pour cela nous avons enregistré (vidéo et audio) puis transcrit les échanges des quatre groupes. Les enregistrements ont eu lieu dans ces deux classes en milieu d'année scolaire (janvier pour une classe, février pour l'autre). Ces classes étaient prises en charge par le même enseignant et étaient habituées à travailler en groupe (disposition en îlots).

Catégorisation des données

Les transcriptions des travaux de groupes ont ensuite été travaillées de sorte à faire apparaître dans un premier temps les éléments qui semblaient relever du registre empirique et du registre des nécessités. Dans un second temps, nous avons étudié comment ces éléments étaient articulés les uns aux autres et notamment s'ils tenaient bien le rôle de contraintes pour la situation. Dans l'échange ci-dessous nous voyons l'émergence des nécessités (N1, en rose) et des contraintes empiriques (C1, en jaune) dans le travail d'un

Tour de parole	Elève		Contrainte empirique	Nécessité
2	Fathallah	Ben, je sais pas parce que là, il y a des carrés de plusieurs tailles du coup, il dit : « il voudrait savoir à l'avance de combien de carreaux de mosaïque il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré. ». Là il y a trois tailles de carrés : un petit carré, un moyen et un grand	C1	
3	Etienne	Et bien, je crois qu'il faut trouver combien de carrés il faudra faire si on a un seul côté, combien de carrés il faudra faire en plus.		N1
4	Romane	J'ai pas compris.		
5	Etienne	Et donc tu as une... D'abord t'as cette ligne-là.	C1	

C1 : On peut décrire la taille des carrés en utilisant la taille de leurs côtés.

N1 : Il existe une fonction f qui au nombre de carrés sur le côté associe le nombre de carrés autour

groupe (énoncé des carrés de Pierre). Au fil des échanges, le nombre de contraintes s'est enrichi tout comme celui des nécessités. Cet avancement dans la construction du problème met à jour différents sous-problèmes qui sont traités soit en parallèle soit les uns après les autres.
Le schéma n°2 rend compte du caractère dynamique et cinématique de la construction du problème (Hersant, 2015) par un des groupes, à savoir les sous-problèmes que les élèves ont traités ainsi que les pistes de réponses. Pour le groupe dont nous avons mentionné quelques échanges ci-dessus, les sous-problèmes construits par les élèves sont les suivants :
- Quels sont les éléments communs à tous les carrés (universalité du carré quelconque construit sur le modèle de l'énoncé) ?
- Est-ce que la formule du périmètre du carré est adaptée ?
- Quelle(s) transformation(s) faire subir à la formule du périmètre pour la rendre opérante dans la situation ?
Dans le schéma n°2 nous faisons apparaître comment les sous-problèmes engendrent l'élaboration de contraintes empiriques (C1, C2, C3) qui sont confrontées à des nécessités (N1, N2, N3, N4).

L'articulation logique du traitement de ces problèmes au travers de la mise en tension des éléments des différents registres permet d'élaborer un espace de contraintes (schéma n°3). On y voit apparaître le changement de paradigme qu'est le passage de la géométrie métrique à celui de l'algèbre. Ce changement de registre explicatif permet de conceptualiser et de formaliser la construction du problème au travers de l'élaboration d'une formule.

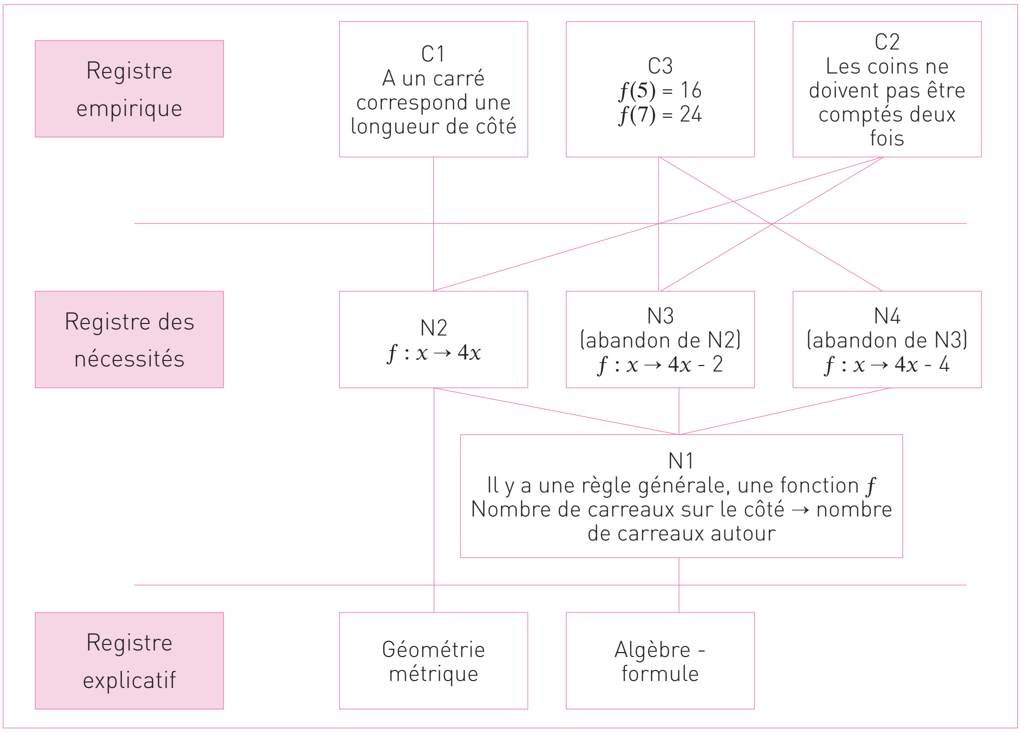
SCHÉMA N°2
Construction dynamique et cinématique-groupe 2

Construction du problème

Position du problème

Qu'est-ce qui fait qu'il y a des carrés différents ?	Prise en compte du nombre de carreaux par côté pour déterminer le nombre de carrés autour. C1	Il existe une corrélation f entre le nombre de carrés sur le côté et le nombre de carrés autour. N1
Est-ce qu'on peut imaginer découper et mettre bout à bout les côtés du carré ?	Problème des 4 coins. C2	$f : n \rightarrow 4n$ N2
Combien y a-t-il de carreaux dans le carré de côté 5 ? Dans le carré de côté 7 ?	$f(5) = 16$ $f(7) = 24$ C3	Abandon de N2 car $f : n \rightarrow 4n - 2$ N3
		Abandon de N3 car $f : n \rightarrow 4n - 4$ N4

SCHÉMA N°3
Espace de contraintes groupe 2



Constructions des problèmes

Au final, notre étude montre des constructions de problèmes différentes selon les groupes travaillant sur le même énoncé. Dans les quatre groupes, les élèves ont mobilisé dans le registre empirique soit les exemples dénombrés sur les énoncés, soit d'autres exemples créés par eux-mêmes (comportant parfois des erreurs). Ils ont également mobilisé tout ce qui avait trait à la structure des carrés ou des maisons (maisons mitoyennes, coin de carrés qui comptent pour deux rangées de carreaux, etc.).
Au niveau du registre des modèles, les différents groupes ont convoqué pour les suites d'allumettes des modèles relevant de la proportionnalité (modèle erroné) ou un programme de calcul. Pour les carrés de Pierre, des élèves ont convoqué des modèles tels que la formule du périmètre puis l'ont modifiée de sorte à la rendre opérante dans la situation alors que d'autres ont travaillé dans une direction erronée, à la recherche de conditions sur l'existence du plus petit carré que l'on pourrait dessiner. Ainsi, les différents registres explicatifs étaient variés et relevaient de cadres tels que l'algèbre, la corrélation entre deux grandeurs (associée à l'idée implicite de fonction), la géométrie métrique ou la géométrie affine.
Deux des quatre groupes ont proposé une solution opérante à la fin de la première séance (réponse générale et communication de cette réponse). Pour les deux autres groupes, les solutions proposées étaient soit erronées (proportionnalité) soit inefficaces (cadre de la géométrie affine qui n'apportait qu'une description affine (et non métrique) des carrés). Le travail mené sur la deuxième journée a permis au dernier groupe de changer de cadre. Le groupe mobilisant la proportionnalité n'a pas avancé dans sa construction du problème malgré les interventions de l'enseignant (ostention de contre-exemples).

Recherche de conditions

Nous avons ensuite comparé en fonction des deux situations proposées aux élèves les travaux des groupes en recherchant des conditions favo-

rables ou défavorables pour l'entrée dans l'algèbre (tableaux 1 et 2). Suivant les situations, le contrat didactique ou le jeu de cadres ont pu avoir un rôle limitant ou facilitateur.
Pour chaque groupe, la compréhension de l'expression « n'importe lequel » a initié les débats. Le concept épistémologique d'universalité a été un élément important de la réflexion des groupes 1, 2 et 3 qui ont cherché à décrire au mieux le cas général ce qui n'a pas été le cas pour le groupe 4. Les groupes 1 et 2 ont proposé une solution efficace dès le premier jour. Le second jour, seul le groupe 3 a proposé une réponse adaptée là où le groupe 4 n'a pas avancé. Pour le groupe 4, le changement de registre explicatif ne s'est pas opéré le second jour. Les élèves n'ont, au final, jamais questionné le modèle de proportionnalité. Il peut y avoir deux aspects à étudier : la pratique habituelle en classe de la proportionnalité (facette épistémologique du contrat didactique, Hersant, 2014), mais aussi une difficulté à appréhender des raisonnements inframathématiques (contre-exemple). Nous émettons l'hypothèse qu'une intervention de l'enseignant aurait été nécessaire le premier jour.
Enfin, deux questions restent en suspens. La première est celle de la temporalité. En effet, la première classe a travaillé sur la situation en janvier alors que l'autre a travaillé sur la situation fin février. Est-ce que ce mois de différence peut influer sur le contrat didactique en place dans les classes ? La deuxième question, celle de la posture des élèves (scolaires, indépendants ...), peut peut-être fournir également des éléments explicatifs quant aux effets différenciateurs de la situation : grande liberté laissée aux élèves sur le premier jour.

TABLEAU N°1
Comparaison des résultats sur « les maisons de Paula »

Groupes	Eléments facilitateurs		Eléments limitants	
	Dans la situation	Chez les élèves	Dans la situation	Chez les élèves
Groupe n°1 **Fin février**	Le jeu de cadres arithmétique / algèbre qui permet d'accompagner la pensée algébrique avec une approche arithmétique au départ de la construction des maisons.	La compréhension de l'universalité à travers l'expression « n'importe lequel ». Le registre de représentation sémiotique du programme de calcul est familier aux élèves.	Les élèves sont en recherche d'une communication écrite irréprochable (dessin + programme + explication des calculs).	
Groupe n°4 **Fin janvier**			Le professeur n'intervient que très peu auprès de ces élèves le jour 1.	Facette épistémologique du contrat didactique : pratique de la proportionnalité Conception erronée de la proportionnalité Invalidation de la proportionnalité à l'aide du contre-exemple qui ne fait pas sens.

TABLEAU N°2
Comparaison des résultats sur « les carrés de Pierre »

Groupes	Eléments facilitateurs		Eléments limitants	
	Dans la situation	Chez les élèves	Dans la situation	Chez les élèves
Groupe n°2 **Fin février**	- Le jeu de cadres : algèbre/géométrie métrique pour accompagner la pensée algébrique.	Compréhension de l'universalité à travers l'expression « n'importe lequel » Ré-élaboration du contrat didactique : s'autoriser à transformer une formule « bien connue » pour l'adapter à la situation.	- Le jeu de cadres : algèbre/ géométrie métrique pour traiter la communication de la réponse.	- La rigueur du vocabulaire : le mot périmètre est emprunté au cadre de la géométrie métrique plutôt que de dire « nombre de carreaux autour ».
Groupe n°3 **Fin janvier**	Jour 2 : le dénombrement sur les exemples de l'énoncé (validé en tant que démarche rationnelle) qui entrent alors dans le registre empirique.	- Jour 2 : la construction du problème du jour 1 qui ne comportait pas d'erreurs, mais était inefficace. - Jour 2 : Autorisation perçue de produire une formule.	- Le jeu de cadres : géométrie affine /géométrie métrique. Ces deux cadres et surtout le passage de l'un à l'autre ont pu faire croire aux élèves qu'ils étaient en bonne voie dans la construction du problème.	- Peu de travail sur les exemples de l'énoncé (jour 1) - (jour 1) Contrat didactique : s'autoriser à convoquer pour la première fois le registre explicatif de l'algèbre.

CONCLUSION

A l'issue de notre étude sur le travail mené par quatre groupes d'élèves de 5e, nous pouvons affirmer que le cadre de la problématisation nous a permis de rendre compte de phénomènes didactiques à l'occasion d'un premier travail d'algébrisation (production de formule). La situation proposée a permis de mettre à jour divers obstacles.

> La diversité des sous-problèmes construits a eu un effet différenciateur sur les travaux des groupes.

Les quatre groupes ont proposé une réponse finale résultant d'une articulation entre le registre empirique et le registre des données. Les espaces contraintes élaborés à l'issue du travail d'analyse témoignent de nombreux allers-retours entre les registres et parfois même un changement de registre explicatif. Trois groupes sur quatre ont produit un travail répondant aux objectifs visés : généraliser et communiquer dans un symbolisme adapté.

La diversité des sous-problèmes construits a eu un effet différenciateur sur les travaux des groupes. L'analyse et la comparaison des résultats montrent différents facteurs explicatifs. Des difficultés d'ordre épistémologique sont apparues sur la construction des concepts de variable et de formule auxquels il faut ajouter le questionnement sur le formalisme syntaxique. Le jeu de cadres a parfois été opérant permettant des changements de registres explicatifs opportuns ou au contraire limitants (cas du groupe n°4 convoquant seulement ce registre de la proportionnalité).

Du point de vue didactique, les situations (énoncés, dispositif et posture de l'enseignant) portaient en elles des éléments facilitateurs ou limitants pour les élèves. Le contrat didactique en place au sein des classes et décliné au sein des groupes a lui aussi pu avoir un effet facilitateur ou au contraire limitant.

Notre étude s'intéressait à la première rencontre d'élèves de 5e avec une situation d'algébrisation. Il serait intéressant de voir comment la pratique de l'algèbre se poursuit chez ces élèves débutants. En effet, ils seront ensuite amenés, pour répondre à des situations données, à construire puis transformer des écritures de plus en plus complexes. Notamment, la problématisation peut être un outil pour étudier comment les élèves construisent la dualité des symboles et des lettres ■

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs, obstacles et conflits*, 41–63.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, 19, 43 72.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7/2*. Consulté à l'adresse http://rdm.penseesauvage.com/Jeux-de-cadres-et-dialectique.html

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 5, 37 65.

Fabre, M., et Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *Aster, 1997, 24« Obstacles : travail didactique »*. Consulté à l'adresse http://documents.irevues.inist.fr/handle/2042/8668

Gascon, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43–63.

Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en didactique des mathématiques, 34/1*. Consulté à l'adresse http://rdm.penseesauvage.com/Facette-epistemologique-et-facette.html

Hersant, M. (2015). 18e école d'été de didactique des mathématiques - Brest 2015 - Sciencesconf.org. Présenté à Démarche d'investigation en formation de professeurs des écoles et apprentissages géométriques. Une étude de cas à partir de la situation des « solides de Platon ». Consulté à l'adresse https://eedm18.sciencesconf.org/

Orange, C. (2012). Enseigner les sciences problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe. Bruxelles : De Boeck.